В курсе интуров у вас были интуры и задача Ш-Л. Скорее всего, Ш-Л вызвал у вас некое недопонимание, что это, о чём это и нафиг оно надо.
Плохая новость: курс ММФ ходит вокруг да около Ш-Л (иногда это говорится явно, иногда нет), так что Ш-Л будет всплывать постоянно.
Хорошая новость: именно на ММФ вы, возможно, сможете понять (причём достаточно быстро, уже в сентябре-октябре), в чём же прикол Ш-Л, хотя на интурах вам эта тема казалась скучной и непонятной (в моём случае так и было).

Задача Штурма-Лиувилля (ЗШЛ) состоит из двух частей: однородного дифура второго порядка (которое я в интурах называл ШЛλ, а в этой методе будем его называть уравнением Штурма-Лиувилля, УШЛ)

$$(p(x)y')' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0$$

и двух ОДНОРОДНЫХ краевых условий.
ОДНОРОДНЫМИ краевыми условиями называются те, которым удовлетворяет тривиальное решение.
Это могут быть условия 1-го рода

$$y(a) = 0$$

Это могут быть условия 2-го рода

$$y'(a) = 0$$

Или 3-го рода:

$$\alpha y(a) + \beta y(b) = 0$$

где $\alpha \neq 0$; $\beta \neq 0$

Я выписал эти условия для левой границы, аналогично можно выписать их для правой границы. Разумеется, на левой границе может быть условие одного рода, а на правой – другого.
Есть и другие виды краевых условий:

- Распадающиеся краевые условия общего вида
  $$\alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \qquad \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0;$$
  $$\alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0, \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0.$$
- Периодические условия $y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b)$.
- Антипериодические условия $y(a) = -y(b), \quad y'(a) = -y'(b)$.
- Общие краевые условия
  $$a_{i1} y(a) + a_{i2} y'(a) + a_{i3} y(b) + a_{i4} y'(b) = 0, \quad i = 1,\ 2.$$

Но все эти краевые условия являются РАВЕНСТВАМИ. «А как может быть иначе?» - спросите вы меня. Может, об этом позже.
Итак, УШЛ является частью ЗШЛ.

Тривиальное решение всегда будет – не зря же и УШЛ однородно, и краевые условия однородны. Причём если мы выберем λ наугад, то будет только оно. И лишь при некоторых λ будут ещё и нетривиальные решения. Такие хорошие, но редкие λ называются СЗ, а решения, им соответствующие – СФ.

Если проводить аналогию с первым курсом, то ЗШЛ эквивалентна задаче «дана система из n+1 уравнений на n переменных с параметром λ, найти все λ, при которых решение существует (эти лямбды будут СЗ) и сами решения (СФ)».
Очевидно, что если мы выберем лямбду наугад, то, скорее всего, все уравнения будут независимы и решения у системы не будет. И лишь при некоторых значениях λ одно из уравнений выразится через другие и решение будет существовать.

Ещё точнее (ближе к настоящей ЗШЛ) будет следующая задача:
Или, ещё точнее, «дана система ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ из n уравнений на n переменных с параметром λ, найти все λ, при которых НЕТРИВИАЛЬНОЕ решение существует (эти лямбды будут СЗ) и сами решения (СФ)».
Опять же: если выберем λ наугад, то, скорее всего, все уравнения окажутся ЛНЗ, и на выходе будет только тривиальное решение, которое нам не нужно. Нам нужно подобрать λ так, чтобы уравнения были ЛЗ, чтобы смогло протиснуться нетривиальное решение.

Только в этом случае всё тривиально: пишем определитель, приравниваем его к 0 и получаем уравнение на λ. В трушной задаче Штурма-Лиувилля никакого определителя нет. Только хардкор.

Теперь важное! Если вы откроете определение ЗШЛ хоть в учебнике, хоть в Википедии, то дополнительно встретите вот такое условие:
В УШЛ

$$(p(x)y')' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0$$

требуется

функции ρ и p дважды непрерывно дифференцируемы и положительны на отрезке $[a, b]$ и функция q непрерывна на $[a,\ b]$

и неотрицательна. То есть требуется, чтобы все три функции были положительны (для одной требование чуть слабее, неотрицательность). Условие дважды дифференцируемости понятно – в слагаемом с p есть два штриха, чтобы все производные существовали. А вот условие положительности… 99%, что вам непонятно, а нафиг оно нужно. Причём кафмат (тут я его немного поругаю) нифига не объясняет, зачем оно нужно. В 4 семестре вы доказывали какие-то свойства, используя положительность, но важность этих свойств хорошо иллюстрирует тот факт, что вы уж наверняка забыли, в чём они заключатся (молчу уж про доказательства ☺) Ничего, у вас есть я, который всё объяснит.

Итак! Если выполнены условия положительности p и ρ, то гарантируется существование нетривиального решения аж при бесконечном (счётном) наборе лямбд. Но есть очень важный нюанс: все лямбды должны быть неотрицательным. Если лямбда отрицательна – то решения нет.

Это не единственное свойство, но пока нам нужно именно оно, поэтому я акцентирую ваше внимание именно на него.

В курсе ММФ поначалу нам будет постоянно встречаться конструкция, когда

$$\frac{\hat{L}(f(x))}{f(x)} = const$$

Оператор Ш-Л, применённый к самой функции, делённый на саму функцию, равен некоей константе, и нужно определить её знак.
Так вот, если мы знаем, что у f(x) есть краевые однородные условия, то тут мы однозначно делаем вывод: константа должна быть отрицательной.
Почему? Потому что мы можем записать

$$\hat{\Pi} f(x) - const \cdot f(x) = 0$$

А затем вспомнить, что я говорил выше. Константа – это минус лямбда. Чтобы были решения при однородных краевых условиях, жизненно важно, чтобы лямбда была положительной, а константа, следовательно, отрицательной.

Конструкция $\frac{\hat{\Pi}(f(x))}{f(x)}$ будет нам встречаться настолько часто, что мы обзовём её оператором Буткарёва.

Итак, если функция f(x) имеет на краях однородные ГУ и оператор Буткарёва от неё равен константе, то он равен ***неположительной*** константе.

Пример. Пусть оператор Штурма-Лиувилля равен просто второй производной (это случай p(x)=тождественной единице).

Тогда оператор Буткарёва имеет вид

$$\frac{f''(x)}{f(x)}.$$

Итак, оператор Буткарёва равен константе.

Если она <0, это косинус и синус. Могут эти ребята удовлетворять однородным ГУ? Да, вполне, у них бесконечно много нулей.

Если она >0, это шинус и чосинус. Могут ли ребята удовлетворять однородным ГУ? Ага, как же. Нет. Взять тот же шинус – у него один ноль… и всё, больше нет нолей ни самого шинуса, ни его производной. У чосинуса есть один нуль производной и больше нет ни нулей функции, ни нулей производной.

Как раз наша теорема в действии! Оператор Буткарёва должен быть равен отрицательной константе, чтобы выполнялись однородные ГУ!